

10. cvičení - teorie

!!! Vždy je třeba si hlídat definiční obory !!!

Goniometrické substituce

Nechť $R(\cdot, \cdot)$ je racionální funkce dvou proměnných (jde o podíl dvou polynomů dvou proměnných).

- $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x) \implies t = \cos x, dt = -\sin x dx$
- $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x) \implies t = \sin x, dt = \cos x dx$
- $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x) \implies t = \tan x$ pro $x \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi), k \in \mathbb{Z}$.

Pak

$$dx = \frac{1}{t^2 + 1} dt, \quad \sin^2 x = \frac{t^2}{1 + t^2}, \quad \cos^2 x = \frac{1}{1 + t^2}, \quad \sin x \cos x = \frac{t}{1 + t^2}$$

- Vždy: $t = \tan \frac{x}{2}$ pro $x \in (-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}$.

Pak

$$dx = \frac{2}{1 + t^2} dt, \quad \sin x = \frac{2t}{1 + t^2}, \quad \cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

Odmocniny

Nechť $R(\cdot, \cdot)$ je racionální funkce dvou proměnných (jde o podíl dvou polynomů dvou proměnných).

U níže uvedených substitucí: k dopočtu dt nejdříve vyjádříme x v závislosti na t a pak teprve derivujeme (vizte příklad níže)

- $R(x, \sqrt[m]{x+a}), m \in \mathbb{N}, m > 1, \implies t = \sqrt[m]{x+a}$
- $R(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}), m \in \mathbb{N}, m > 1, a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad \neq bc \implies t = \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}$
- $R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})$
 - $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2 \implies \sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a}|x - x_1|$
 - $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) \implies t = \sqrt{a \frac{x - x_1}{x - x_2}}$
 - $ax^2 + bx + c$ nemá kořen $\implies t = \sqrt{ax^2 + bx + c} \pm x\sqrt{a}$

Poznámka. Vyskytuje-li se v integrálu více odmocnin, převedeme je na mocniny téže odmocniny (např. $\sqrt{x}$ a $\sqrt[3]{x}$ převedeme na $(\sqrt{x})^3$ a $(\sqrt{x})^2$).

Příklad. $t = \sqrt{\frac{x+1}{x-2}}$

$$t^2 = \frac{x+1}{x-2} \implies t^2(x-2) = x+1 \implies x(t^2-1) = 1+2t^2 \implies x = \frac{2t^2+1}{t^2-1}$$

$$x = \frac{2t^2+1}{t^2-1} \implies dx = \frac{4t(t^2-1) - (2t^2-1)2t}{(t^2-1)^2} dt = \frac{4t^3 - 4t - 4t^3 - 2t}{(t^2-1)^2} dt = \frac{-6t}{(t^2-1)^2} dt$$